Ejemplo.- Representación de función polinómica

Sea $f(x) = 3x^5 - 20x^3$

1.- DOMINIO - El dominio de esta función es $\mathbb{R}$, por ser polinómica.

2.- PUNTOS DE CORTE -

Con el eje OX → $y = 0$; $3x^5 - 20x^3 = 0$

Saco factor común: $x^3(3x^2 - 20) = 0$ → $x^3 = 0$; $x = 0$

→ $3x^2 - 20 = 0$; $x = \pm\sqrt{\dfrac{20}{3}} = \pm\sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 5}{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \underbrace{=}_{\text{Racionalizo}} \pm\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

Por lo que la función corta al eje OX en los puntos: $(0,0)$; $\left(\frac{2\sqrt{15}}{3}, 0\right)$ y $\left(-\frac{2\sqrt{15}}{3}, 0\right)$

Con el eje OY → $x = 0$; $f(x) = 3 \cdot 0^5 - 20 \cdot 0^3 = 0$ Corta al eje en $(0,0)$

3.- SIMETRÍA - La función presentará simetría par si $f(x) = f(-x)$ e impar si $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = 3(-x)^5 - 20(-x)^3 = -3x^5 + 20x^3$

$-f(x) = -(3x^5 - 20x^3) = -3x^5 + 20x^3$

En este caso $f(-x) = -f(x)$ y por tanto la función presenta simetría impar, es decir, es simétrica respecto del origen de coordenadas.

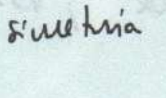
4.- CONTINUIDAD - No es necesario su estudio en ningún punto. Al ser una función polinómica, sabemos que es continua en $\mathbb{R}$.

5.- ASÍNTOTAS Y RAMAS PARABÓLICAS - Por ser una función polinómica, no necesitamos realizar un estudio de las asíntotas, puesto que este tipo de funciones no las tienen.

Veamos pues, sus ramas parabólicas:

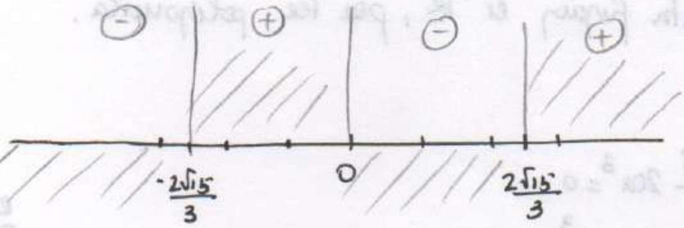
$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^5 - 20x^3 = +\infty$ → Esto significa, gráficamente, que:

$\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^5 - 20x^3 = -\infty$ → Esto significa, gráficamente, que:



6.- SIGNO DE LA FUNCIÓN.-

$f(x)=0$ $\to$ $x=0$; $x=+\frac{2\sqrt{15}}{3}$ $(\simeq 2,6)$; $x=-\frac{2\sqrt{15}}{3}$ $(\simeq -2,6)$



Le doy valores a ambos lados de estos puntos para ver el comportamiento de la función. Estos valores los tomo al azar:

$f(3)=3\cdot3^5-20\cdot3^3=189>0$ ⊕ POR ENCIMA DEL EJE OX

$f(1)=3\cdot1^5-20\cdot1^3=-17<0$ ⊖ FUNCIÓN POR DEBAJO DEL EJE OX

$f(-1)=3(-1)^5-20(-1)^3=17>0$ ⊕ FUNCIÓN POR ENCIMA DEL EJE OX

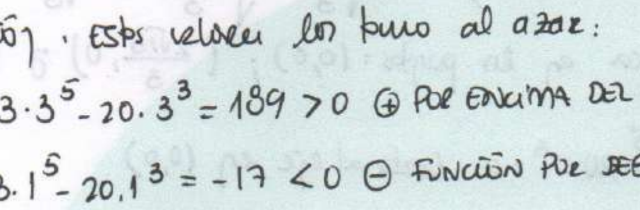
$f(-3)=3(-3)^5-20(-3)^3=-189<0$ ⊖ FUNCIÓN POR DEBAJO DEL EJE OX

7.- MONOTONÍA Y PUNTOS SINGULARES - $f'(x)=0$

$f'(x)=15x^4-60x^2$; $15x^4-60x^2=0 \to$ saco factor común: $x^2(15x^2-60)=0$

$x^2=0$; $x=0$

$15x^2-60=0$; $x=\pm\sqrt{\frac{60}{15}}=\pm\sqrt{4}=\pm2$



Vamos a dar valores a la derivada a la derecha e izquierda de estos valores para ver el comportamiento de la función, de tal forma que, donde $f'(x)>0$ tendremos un tramo creciente y donde $f'(x)<0$, uno decreciente.

$f'(-3)=15(-3)^4-60(-3)^2=675>0$ ↗ tramo creciente

$f'(-1)=15(-1)^4-60(-1)^2=-45<0 \to$ tramo decreciente

$f'(1)=15\cdot1^4-60\cdot1^2=-45<0 \to$ tramo decreciente

$f'(3)=15\cdot3^4-60\cdot3^2=675>0$ ↗ tramo creciente

La función es creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(-2,0)\cup(0,2)$

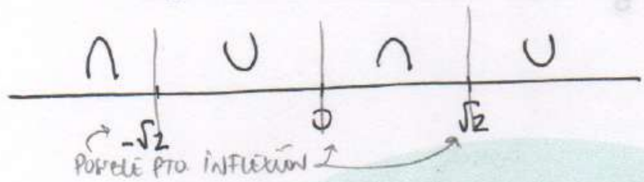
En $x=-2$ la función presentará un máximo y en $x=2$ un mínimo (pendiente de comprob.)

8.- CURVATURA.- $f''(x)=0$

$f''(x)=60x^3-120x$; $60x^3-120x=0$; saco factor común $x\,(60x^2-120)=0$

$x=0$

$60x^2-120=0$; $x=\pm\sqrt{\frac{120}{60}}=\pm\sqrt{2}$



vamos a dar valores a la segunda derivada a derecha e izquierda de estos valores para ver el comportamiento de la función en estos tramos, de tal forma que, donde $f''(x)>0$ tendremos un tramo cóncavo (feliz ∪) y donde $f''(x)<0$, uno convexo (triste ∩)

$f''(2)=60\cdot2^3-120\cdot2=360>0$ ∪

$f''(1)=60\cdot1^3-120\cdot1=-60<0$ ∩

$f''(-1)=60(-1)^3-120(-1)=60>0$ ∪

$f''(-2)=60(-2)^3-120(-2)=-240<0$ ∩

función cóncava en $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$

función convexa en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$

9.- COMPROBACIONES Y/O DEMOSTRACIONES

$f''(-2)=-240<0\rightarrow$ Queda comprobado que en $x=-2$ la función presenta un máximo de coordenadas $(-2,f(-2))=(-2,64)$

$f(-2)=3(-2)^5-20(-2)^3=64$

$f''(2)=360>0\Rightarrow$ Queda comprobado que en $x=2$ la función presenta un mínimo de coordenadas $(2,f(2))=(2,-64)$

$f(2)=3\cdot2^5-20\cdot2^3=-64$

$f'''(x)=180x^2-120$

$f'''(-\sqrt{2})=180(-\sqrt{2})^2-120=240\neq0$ Punto de inflexión de coordenadas $(-\sqrt{2},f(-\sqrt{2}))=(-\sqrt{2};39{,}6)$

$f'''(0)=180\cdot0^2-120=-120\neq0$ P. inflexión de coord. $(0,f(0))=(0,0)$

$f'''(\sqrt{2})=180\cdot(\sqrt{2})^2-120=240\neq0$ P. inflexión de coord. $(\sqrt{2},f(\sqrt{2}))=(\sqrt{2};-39{,}6)$

$f(-\sqrt{2})=3(-\sqrt{2})^5-20(-\sqrt{2})^3=+39{,}6$ $\quad f(0)=0$

$f(\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^5-20(\sqrt{2})^3=-39{,}6$

10.- PERIODICIDAD → No es necesario, sólo en funciones trigonométricas

11.- RESUMEN Y REPRESENTACIÓN.-

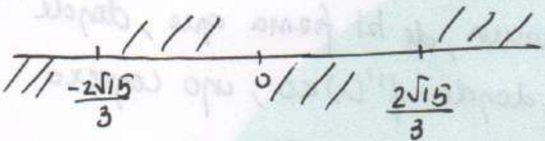
Dominio $\mathbb{R}$

Corte a los ejes: $(0,0)$; $\left(\frac{2\sqrt{15}}{3}, 0\right)$ $\left(-\frac{2\sqrt{15}}{3}, 0\right)$

presenta simetría impar

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

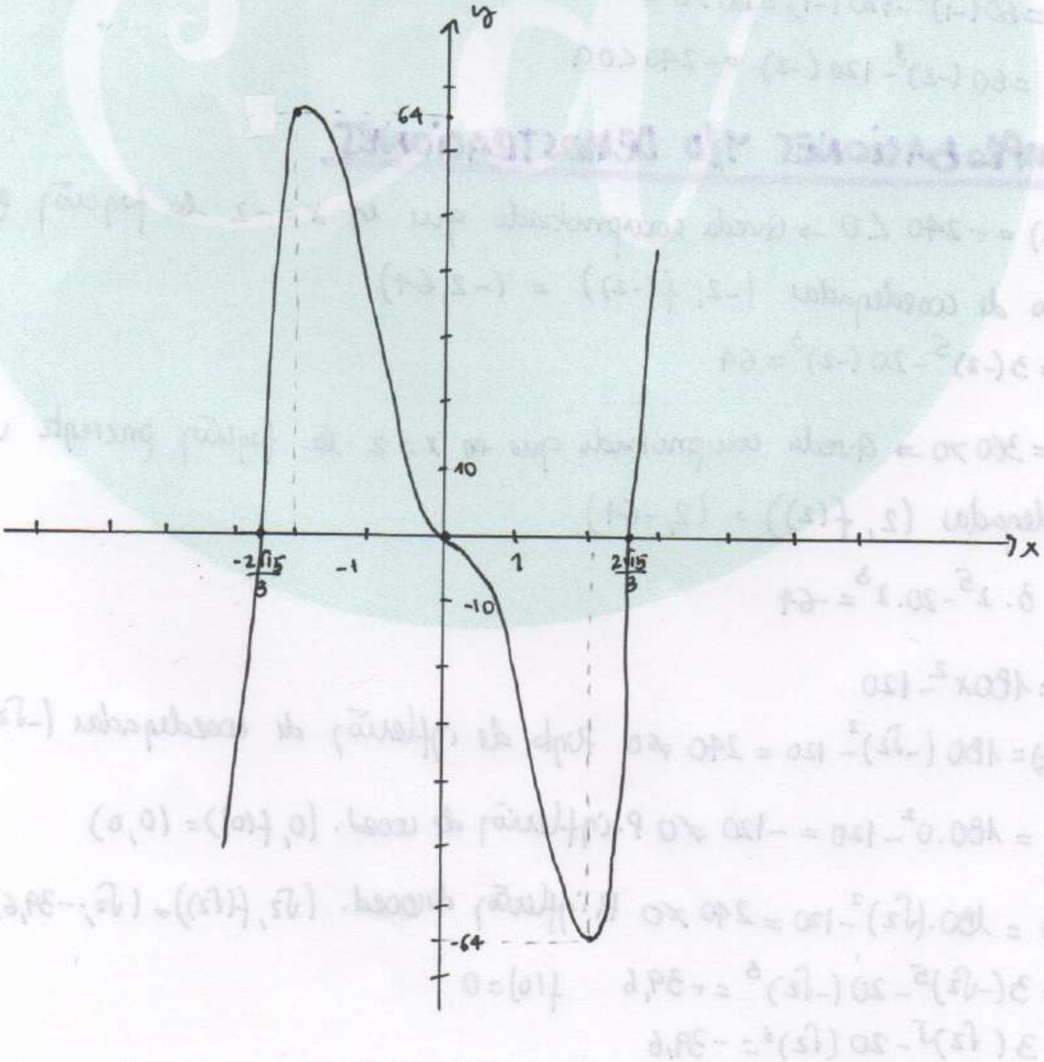
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Máximo en $(-2, 64)$

mínimo en $(2, -64)$

puntos de inflexión en $(0,0)$; $(-\sqrt{2}; 39{,}6)$; $(\sqrt{2}; -39{,}6)$



Correo: afdelgador@gmail.com teléfonos: 921 931 111 / 722 290 696