2º BACHILLERATO

MATEMÁTICAS II

INTEGRALES INDEFINIDAS
INTRODUCCIÓN

CLASESANA.COM
CLASESATDELGADOR@GMAIL.COM

INTEGRALES INDEFINIDAS

En el cálculo de primitivas o integración lo más importante es la práctica para adquirir destreza.
También implica dominar muy bien el cálculo de derivadas, hasta tal punto de reconocer a simple vista una función derivada de otra.

DEFINICIÓN: F (x) es una primitiva de f(x), si F ' (x) = f (x). Esto se expresa de la siguiente forma: $\int f\ (x) = F(x)$

Cada función tiene infinitas primitivas, pues si F (x) es primitiva de f (x) (es decir, si F ' (x) = f(x)), entonces F (x) + K también lo es, pues D [F (x) + k] = F ' (x) = f (x)
A la expresión $\int f\ (x)$ se le llama integral indefinida o simplemente, integral de f (x). Por eso, al cálculo de primitivas se le suele llamar cálculo de integrales o integración
Por ejemplo: $\int 2x\ dx = x^2 + k$, porque $(x^2 + k)$' = 2x

Nota: El dx (diferencial de x), indica cuál es la variable de la función que estemos integrando

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

FUNCIONES SIMPLES	FUNCIONES COMPUESTAS
$\int dx = x + K$	
$\int K\,dx = Kx + K$	
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$, n ≠ -1	$\int u^n \cdot u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + K$, n ≠ -1
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + K$	$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert + K$
$\int e^x\,dx = e^x + K$	$\int e^u \cdot u'\,dx = e^u + K$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$	$\int a^u \cdot u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + K$
$\int \cos x\ dx = sen\ x + K$	$\int \cos u \cdot u'\ dx = sen\ u + K$
$\int \text{sen}\, x\ dx = -cos\ x + K$	$\int \text{sen}\, u \cdot u'\ dx = -cos\ u + K$
$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = tg\ x + K$	$\int \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'\,dx = tg\ u + K$
$\int (1 + tg^2 x)\,dx = tg\ x + K$	$\int (1 + tg^2 u) \cdot u'\,dx = tg\ u + K$
$\int (sec^2 x)\,dx = tg\ x + K$	$\int (sec^2 u) \cdot u'\,dx = tg\ u + K$
$\int \frac{-1}{sen^2 x}\,dx = cotg\ x + K$	$\int \frac{-1}{sen^2 u} \cdot u'\,dx = cotg\ u + K$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\ x + K$	$\int \frac{1}{1+u^2} \cdot u'\,dx = arctg\ u + K$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a} arctg\ \frac{x}{a} + K$	$\int \frac{1}{a^2+u^2} \cdot u'\,dx = \frac{1}{a} arctg\ \frac{u}{a} + K$
$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = arc\ cotg\ x + K$	$\int \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'\ dx = arc\ cotg\ u + K$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arc\ sen\ x + K = -\arccos x + K$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'\,dx = arc\ sen\ u + K = -\arccos u + K$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = arcsen\ \frac{x}{a} + K$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} \cdot u'\,dx = arc\ cos\ \frac{u}{a} + K$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arc\ cos\ x + K$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'\,dx = arc\ cos\ u + K$

Integral indefinida	Dada una función f (x), decimos que la función F (x) es una primitiva de f (x) si se cumple: F' (x) = f (x). Se representa por: $\int f(x)dx = F(x) + C$
Propiedades de la integral indefinida	$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$
Integración por sustitución	El método de integración por sustitución consiste en introducir una nueva variable (usaremos t), que sustituye a una expresión adecuada en función de x, de forma que la integral se transforme en otra de variable t, más fácil de integrar. Es recomendable el uso de este método cuando nos encontremos con dos funciones multiplicando y una sea o pueda ser transformada en la derivada de la otra
Integración por partes	$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$
Integración de funciones racionales	Caso I: grado del numerador P (x) mayor o igual que el grado del denominador Q (x). Resolvemos dividiendo y expresando la integral de la siguiente manera: $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$ (donde C (x) es el cociente de la división de P (x) entre Q (x) y R (x), el resto)
	Caso II: grado del numerador P (x) menor que grado del denominador Q (x). Resolvemos descomponiendo en fracciones más simples. Varios casos **IIa**) Si Q (x) tiene solo raíces reales simples: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \cdots + \frac{M}{x-m}dx$ **IIb**) Si Q (x) tiene raíces reales simples y múltiples: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{x-a}dx + \int \frac{A_2}{(x-a)^2}dx + \cdots + \int \frac{A_n}{(x-a)^n}dx + \int \frac{B_1}{x-b}dx + \int \frac{B_2}{(x-b)^2}dx + \cdots + \int \frac{B_n}{(x-b)^n}dx + \int \frac{M_1}{x-m}dx + \int \frac{M_2}{(x-m)^2}dx + \cdots + \int \frac{M_p}{(x-m)^p}dx$ **IIc**) Si Q (x) tiene una raíz real simple y dos complejas conjugadas: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{Mx+N}{px^2+qx+r}dx$
Integración de funciones cíclicas (bucle)	Para calcular la primitiva: $\int sen^m\, x \cdot cos^n\, x$ Si n o m son impares, hacemos el cambio sen x = t o cos x = t Si n o m son pares, transformaremos la integral, utilizando las fórmulas del seno y coseno del ángulo doble, en otra más fácil de resolver