2º BACHILLERATO

MATEMÁTICAS II

VECTORES Y GEOMETRÍA
EJERCICIOS FINALES

CLASESANA.COM
CLASESATDELGADOR@GMAIL.COM

EJERCICIOS FINALES

Por último, te dejo una relación de ejercicios de otros exámenes y de pruebas de acceso a la Universidad.

1.- Calcular la distancia del punto de coordenadas (1, 1, 2) al plano que pasa por los puntos de coordenadas (1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1).

2.- Calcular la distancia del punto de coordenadas (3, 5, 0) a la recta que pasa por los puntos de coordenadas (0, 1, 2) y (0, 1, 1)

3.- Determinar una recta que sea paralela al plano de ecuación $x + y + z = 3$, que corte a la recta de ecuaciones $x = 0$, $z = 0$, y que también corte a la recta de ecuaciones $z = 1$, $y = 0$.

4.- Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación $x - 2y + z = 1$ y que también sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas (2, 0, 1); (0, 2, 1) y (1, -1, 0)

5.- Definir el producto escalar de vectores y enunciar su relación con los conceptos de ángulo y distancia entre dos puntos

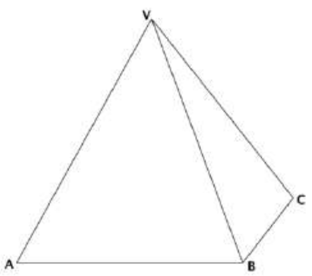
6.- Calcular un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas (1, 0, 2) y (2, 1, 0).

7.- Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación $x + z = 2$ y corte perpendicularmente a la recta de ecuaciones $x + y = 0$; $y + z = 2$

8.- ¿Qué ángulo deben forma dos vectores no nulos $\vec{e}$ y $\vec{v}$ para que ambos tengan el mismo módulo que su diferencia $\overrightarrow{e - v}$

9.- Hallar dos vectores linealmente independientes que sean ortogonales al vector de coordenadas $\vec{e} = (1, 1, 3)$.

10.- La base de una pirámide es un cuadrado ABCD de 2 metros de largo y su vértice V está situado a una altura de 3 metros sobre el centro de la base. Calcular el ángulo que forman los planos ABV y BVC.



11.- Determinar si el plano 3x – 2y + z = 1 es perpendicular a la recta de ecuaciones $\begin{cases} -x = 3y + 3z \\ y + 2z = \ -1 \end{cases}$

Determinar también si es paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas (1, -1, 1) y (-1, -1, 0).

12.- Calcular el área del cuadrilátero de vértices A (1, 0, 1), B (2, 0, 2), C (1, 2, 1) y D (3, 1, 3)

13.- Determinar una constante a para que el plano de ecuación $\pi_1 \equiv$ ax + y + z = 2 forme un ángulo de $\pi/3$ radianes con el plano $\pi_2 \equiv$ z = 0

14.- Sabiendo que los lados de un rectángulo ABCD miden 1 y 3 metros, calcular el producto escalar $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD}$, y el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA}$

15.- Determinar un plano π que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones r ≡ $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$, y también sea paralelo a la recta s que pasa por los puntos A (1, 1, 0) y B (0, 1, 1)

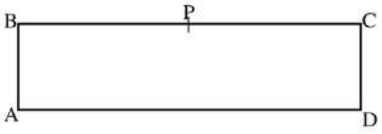
16.- Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos de coordenadas A (1, 0, 0), B (0, 1, 1) y C (1, 2, 0). Determinar la distancia del punto P (2, 1, 1) a dicho plano

17.- ¿Qué relación hay entre los coeficientes de las ecuaciones:
ax + by + cz = d;   a'x + b'y + c'z = d' de dos planos paralelos?
Razonar la respuesta

18.- Determinar una recta r que sea paralela al plano α que pasa por los puntos de coordenadas A (1, 1, 0), B (1, 0, 1) y C (0, 1, 1) y que también sea paralela al plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y + 3z = 0$ y que no esté contenida en ninguno de estos dos planos

19.- Determinar las coordenadas de un punto que diste 2 unidades de la recta r de ecuación: r ≡ $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$

20.- Si los lados de un rectángulo ABCD miden 1 cm y 4 cm, calcular el coseno del ángulo PAC, donde P es el punto medio del lado BC:



21.- Sean los puntos de coordenadas A (1, 0, 0), B (0, 1, 0) y C (0, 0, 1)

a) Calcular el área del triángulo que forman los puntos A, B y C

b) Determinar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

22.- Hallar un vector de módulo uno que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}$ = (0, 1, 1) y $\vec{v}$ = (2, 1, 0)

23.- Determinar la relación que debe existir entre a y b para que los puntos de coordenadas A (1, 0, 0); B (a, b, o), C (a, 0, b) y D (0, a, b) estén en un plano

24.- Determina el plano π que pasa por el punto A (1, 2, 3) y por la recta r de ecuaciones x + y = 1; y + z = 1

25.- Calcula el ángulo que forma el plano $\pi \equiv$ x + y + z = 0 con la recta de ecuaciones x + y = 1; y + z = 1

26.- Determina un plano π que pase por los puntos A (1, 0, 0) y B (0, 1, 0) , y sea paralelo a la recta r $\equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=2 \end{cases}$

27.- Determine la relación que debe existir entre a y b para que el punto P (0, a, b) esté en el plano determinado por los puntos A (1, 0, 0), B (1, 1, 1) y C (0, 2, 1)

28.- Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector $\vec{v}$ = (1, 2, 1)

29.- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi \equiv x+y+z=1$

30.- a) Determinar la posición relativa del plano $\pi \equiv$ x – y + z = 2 y la recta de ecuaciones r $\equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$

b) Calcula la distancia entre la recta r y el plano π anteriores

31.- Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales de módulo 4 y 3, respectivamente. Calcula el módulo de los vectores $\vec{u}$ + $\vec{v}$ y $\vec{u}$ - $\vec{v}$, indicando los resultados teóricos en que te basas para ello

32.- Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no proporcionales del espacio real tridimensional. ¿Qué relación existe entre las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y la dirección de su producto vectorial?, ¿Cuánto vale el módulo del producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

33.- a) Determina la recta r que pasa por el punto A (1, 1, 1) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y=1$

b) Calcula el punto P donde la recta obtenida corta al plano $\pi \equiv x+y=1$

34.- a) Determina el plano π que pasa por el punto P (1, 1, 1) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$

b) Calcula el punto P donde se cortan la recta r y el plano π

35.- Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+bz=0 \end{cases}$, determine la relación que debe existir entre a y b para que:
a) r y r' sean paralelas
b) r y r' sean perpendiculares

36.- a) Calcule el punto de corte del plano $\pi \equiv x+y=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

b) Determine la recta s que está contenida en el plano π y corta perpendicularmente a r

37.- Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases}$
a) Compruebe que r y s son coplanarias
b) Obtenga las ecuaciones de la recta t que corta a r y a s, y es perpendicular a ambas

38.- a) Compruebe que la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z=1$

b) Calcule los dos puntos de la recta r cuya distancia al plano π es igual a $\sqrt{3}$ unidades

39.- Calcule el ángulo que forma el plano $\pi \equiv \sqrt{3}-z=3$ con la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ y-x=-1 \end{cases}$ (los ángulos se miden en radianes)

40.- De todos los planos que pasan por los puntos P (0, 0, -1) y Q (1, 0, 0), calcule el plano π que sea paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x-z=0 \end{cases}$

41.- Determine la relación que deben cumplir λ y μ para que la distancia del punto P (λ, 1, μ) al plano determinado por los puntos A (1, 1, 1), B (1, 0, 0) y C (0, 2, 1) sea igual a 1

42.- Dados los puntos A (1, 1, 1), B (1, 0, 0) y C (0, 2, 1), sea r la recta que pasa por A y B y sea π el plano que pasa por C y es perpendicular a r
Calcule el punto P_0 en el que se cortan r y π

43.- Fijados los puntos A (1, 0, 0) y B (0, 1, 0), obtenga la relación que deben cumplir los números reales λ y μ para que el punto P (λ, μ, 0) sea tal que el triángulo ABP tenga área igual a 1

44.- Sea θ el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (\lambda, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, \mu, 1)$, donde λ y μ son números reales
a) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla que $\cos\theta = 0$
b) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla que $\operatorname{sen}\theta = 0$

45.- Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$, obtenga un punto P de r y un punto Q de s tales que el vector $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ tenga módulo igual a q y sea ortogonal al vector $\vec{v} = (-1, 0, 1)$

46.- a) Determine el plano π que pasa por el punto A (1, 0, 1) y es perpendicular a la recta r de ecuaciones x + y + z = 0; x – z = 1
b) Calcule el punto P en el que se cortan r y π

47.- a) Estudie, en función de los parámetros a y b, la posición relativa de la recta de ecuación $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + az = b$
b) Para cada una de las posiciones obtenidas, diga cómo es el sistema formado por las ecuaciones x = 0; y = 0; x + y + az = b

48.- Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$
a) Determine el plano π que contiene a la recta r y corta perpendicularmente a s
b) Calcule el punto donde se cortan el plano π y la recta s

49.- Sea r la recta que pasa por los puntos A (1, 0, 0) y B (1, -1, 0), y sea s la recta que pasa por los puntos C (0,1, 1) y D (1, 0, -1)
a) Calcule el plano π que contiene a s y es paralelo a r
b) Calcule la distancia entre las rectas r y s

50.- a) Calcule las ecuaciones implícitas de la recta r que pasa por los puntos A (1, 0, 0) y B (-1, 0, -1)
b) De todos los planos que contienen a la recta r, obtenga uno cuya distancia al punto C (0, -1, 0) sea igual a 1

51.- Calcule todos los vectores de módulo 2 que son ortogonales a los vectores $\vec{u}$= (1, -1, -1) y $\vec{v}$= (-1, 2, 1)

52.- Calcule la distancia del punto P (3, -1, 2) a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$

53.- Dado el plano $\pi \equiv x + z = 1$ y los puntos A (1, 0, 0) y B (0, 1, 0), calcule los valores de c para los que el punto P (0, 0, c) cumple “ área del triángulo ABP” = “distancia de P a π”

54.- Sea π el plano determinado por los puntos A (1, 0, 0), B (0, 1, 0) y P (0, 0, c), y sea la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$

a) Obtenga la ecuación implícita de π

b) Determine los valores de c para los que r y π son paralelos

c) Determine los valores de c para los que r y π son perpendiculares

55.- Sean en R^3 los vectores $\vec{e}$ = (2, 0, 0), $\vec{u}$ = (1, 0, -1) y $\vec{v}$ = (-2, 3, -2)

a) Calcule el producto vectorial $\vec{e}\ x\ \vec{u}$

b) Calcule el seno del ángulo θ que forman $\vec{e}\ y\ \vec{u}$

c) Calcule el ángulo β que forman $\vec{u}\ y\ \vec{v}$

56.- a) Calcule las ecuaciones implícitas de la recta r que pasa por el punto P (1, -1, 0) y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x + y = 2$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 1$

b) Calcule también las ecuaciones paramétricas de r y un vector director de r

57.- En R^3, calcule la distancia del punto P (1, -1, 2) a la recta r que pasa por los puntos A (0, -1, 1) y B (1, 0, 1)

58.- Fijados los puntos A (1, 1, 0) y B (1, 0, 1), calcule todos los puntos de la forma X (0, λ, μ) para los que el triángulo ABX es equilátero

59.- Considere en R^3 las rectas r≡ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, s≡ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

a) Obtenga un vector director de la recta s

b) Obtenga el plano π_1 que contiene a r y es paralelo a s

c) Obtenga el plano π_2 que contiene a r y es perpendicular a s

60.- a) Dado el plano $\pi_1 \equiv z = 0$, escriba las ecuaciones de los planos π_2 y π_3 tales que los planos π_1, π_2, π_3 se corten dos a dos, pero no exista ningún punto común de los tres

b) Clasifique el sistema formado por las ecuaciones de los planos π_1 , π_2 y π_3

61.- a) Calcule el valor del parámetro k para que la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ se paralela al plano $\pi \equiv kx + y + kz = 1$

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, calcule la distancia de la recta r al plano π

62.- En R^3, considere los cuatro puntos A (0, 1, 1), B (-2, 0, -1), C (-1, 1, 0) y D (-2, 2, 1); y sea r la recta que pasa por C y D

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de r

b) Halle los puntos P de la recta r para los que el triángulo ABP sea rectángulo en P

63.- En R^3, considere el plano $\pi \equiv az + by + cz = d$, la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y el punto P (1, 0, 1)

a) Obtenga cómo deben ser los números a, b, c, d para que el plano π contenga a la recta r

b) Supuesto que el plano π contiene a la recta r, pruebe que la distancia de P a π es menor o igual a 1: d (P, π) $\leq$ 1

64.- Dados en R^3 los planos $\pi_1 \equiv x + y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 1$, obtenga el conjunto de H de los puntos de R^3 que distan igual de dichos planos

65.- a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A (0, 1, 1) y B (1, 1, -1)

b) Calcule todos los puntos de la recta r que equidistan de los planos $\pi_1 \equiv x + y = -2$ y $\pi_2 \equiv x - z = 1$

66.- Sean $\vec{e}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de R^3 tales que $\vec{e} \; x \; \vec{u}$ = (1, 0, -1), $\vec{v} \; x \; \vec{e}$ = (0, 1, 1)

a) Calcule el vector ($\vec{e} \; x \; \vec{u}$) x ($\vec{v} \; x \; \vec{e}$)

b) Calcule el vector $\vec{w}$ = $\vec{e}$ x (2$\vec{u}$ - $\vec{e}$ + 3$\vec{v}$)

67.- Considere en R^3 los puntos A = (1, 1, -1) y B = (0, 1, 1), y los planos $\pi_1 \equiv x + y = 0$ y $\pi_2 \equiv x - z = 0$

a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A y B

b) Obtenga un punto de P de la recta r cuya distancia al plano π_1 sea el doble de su distancia al plano π_2, esto es, d (P, π_1) = 2 · d (P, π_2)

68.- Sean en R^3 los vectores $\vec{u}$ = (1, 1, 0) y $\vec{v}$ = (-1, 0, 1)

a) Calcule el producto vectorial $\vec{u}$ x $\vec{v}$

b) Obtenga un vector $\vec{e}_1$ de R^3 que cumpla cos $\sphericalangle$ ($\vec{e}_1$, $\vec{u}$) = 0

c) Obtenga un vector $\vec{e}_2$ de R^3 que cumpla sen $\sphericalangle$ ($\vec{e}_2$, $\vec{u}$) = 0

69.- En R^3, sea π el plano de ecuación x – z = 2, y sea r la recta que pasa por los puntos A (1, 0, 0) y B (0, 0, b)

a) Calcule un vector director de la recta r

b) Determine b para que r y π sean perpendiculares

c) Determine b para que r y π sean paralelos

d) ¿Está r contenida en π para algún valor de b? Razone la respuesta

70.- En R^3, considere el punto P = (1, 0, 1) y los planos $\pi_1 \equiv x + z = 0$, $\pi_2 \equiv y - z = 0$. Obtenga un plano π_3 que cumpla a la vez las siguientes condiciones:

(i) P $\in \Re$

(ii) π_1 corta a π_3 en una recta

(iii) los planos π_1, π_2 y π_3 no tienen puntos en común

71.- Sean en R^3 los vectores $\vec{e}$ = (0, 1, 0), $\vec{u}$ = (3, -2, 2) y $\vec{v}$ = (0, 1, 1)
a) Calcule el producto vectorial $\vec{e}$ x $\vec{u}$
b) Calcule el ángulo $\emptyset$ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$
c) Demuestre que la familia $\{\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente

72.- En R^3 se consideran las rectas de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = -8 \end{cases}$, s$\equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{a} = \frac{z-1}{-1}$
a) Halle el valor de a para que r y s sean paralelas
b) Para el valor de a obtenido en el apartado anterior, calcule la distancia entre r y s

73.- Considere en R^3 las rectas: r$\equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, s$\equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$
a) Obtenga un vector director de la recta s
b) Obtenga el plano π_1 que contiene a r y es paralelo a s
c) Obtenga el plano π_2 que contiene a r y es perpendicular a s

74.- En R^3, considere los puntos A = (1, 2, 1); B = (-2, -1, -3), C = (0, 1, -1) Y D = (0, 3, -19 y sea r la recta que pasa por A y B
a) Calcule las ecuaciones paramétricas de r
b) Obtenga un punto P de la recta r tal que la distancia de C a P sea igual a la distancia de D a P

75.- Sean el plano $\pi \equiv y + z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$
a) Calcule la intersección del plano y la recta
b) Determine la recta s que pasa por el punto P = (1, 0, 0), es paralela al plano π y es perpendicular a la recta r

76.- Sean los puntos A = (1, 0, 1) y la recta r dada por el punto B = (-1, 0, 2) y el vector $\vec{v}$ = (-1, 1, 0)
a) Calcule la distancia del punto A a la recta r
b) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y O, siendo O = (0, 0, 0)

77.- Sean los puntos A = (2, 0, 1), B = (2, 0, 3) y la recta r dada por el punto C = (1, 0, 2) y el vector $\vec{v}$ = (-1, 0, 0). Determine los puntos P de la recta r para los cuales el área del triángulo ABP es 2

78.- Sean las rectas $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-2}{4}$ y s$\equiv \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x + 2y - z = 4 \end{cases}$
a) Estudie la posición relativa de dichas rectas
b) Halle la distancia entre ambas rectas

79.- Sean los puntos A = (0, 0, 2), B = (2, 0, 1), C = (0, 2, 1) y D = (-2, 2, -1)
a) Halle la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C
b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios
c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D

80.- Dados los puntos A = (1, 0, 2) y B = (3, -2, -2). Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio

81.- Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

a) Estudie si las trayectorias de las rectas se cortan, se cruzan o coinciden
b) Halle dos vectores directores de r y s. Calcule el área del triángulo que forman

82.- Sean r la recta que pasa por los puntos A = (0, 0, -1) y B = (0, -2, -1), y s la recta que pasa por los puntos C = (-1, 2, 0) y D = (1, 0, -1)
a) Calcule el plano π que contiene a s y es paralelo a r
b) Calcule la distancia entre las rectas r y s