

2º BACHILLERATO

MATEMÁTICAS CCSS

Y MATEMÁTICAS II

» EJERCICIOS FINALES

CLASESATDELGADOR@GMAIL.COM

EJERCICIOS FINALES

1.- La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es M. Hallar un sistema equivalente tal que todos los elementos de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.- Calcular todas las matrices X tales que $AX + B = X$, donde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.- Calcular la matriz X tal que $AX = B$, donde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4.- La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es M. Hallar un sistema equivalente tal que los tres coeficientes que están por encima de la diagonal principal de la nueva matriz asociada

sean nulos: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

5.- Calcular dos números naturales a y b, menores que 10 y tales que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix} \text{ tenga de rango } 2$$

6.- Dar un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible

7.- Definir la suma y el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices que no puedan sumarse ni multiplicarse

8.- Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el parámetro

$$\text{a: } \begin{cases} (a-3)x + 4z = 2 \\ x - 2z = -1 \\ -x + ay + 2z = a \end{cases}$$

9.- Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del

$$\text{parámetro a: } \begin{cases} ax - ay + az = a \\ (3-2a)z = 1 \\ x + (a-1)y = 0 \end{cases}$$

10.- Determinar todos los números reales x para los que es positivo el

$$\text{determinante: } \begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}$$

11.- Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del

$$\text{parámetro a: } \begin{cases} ay + (a+1)z = a \\ ax + z = a \\ x + az = a \end{cases}$$

12.- Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ay + az = 0 \\ x + z = 0 \\ 4x - 2y + az = a \end{cases}$, según los valores del parámetro a

13.- Determinar un valor del parámetro a para que las siguientes

$$\text{ecuaciones sean linealmente dependientes: } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ y + 2z = a \end{cases}$$

14.- Dar un ejemplo de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado.

Interpretarlo geoméricamente

15.- Definir el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices A, B con dos filas y dos columnas, tales que $A \cdot B$ no coincida con $B \cdot A$

16.- Determinar todas las matrices X, tales que $A \cdot X = X \cdot A$,

$$\text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

17.- Hallar una matriz de 3 filas y 3 columnas que tenga 3 elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden 2 sea nulo

18.- Definir el concepto de rango de una matriz.

Dar un ejemplo de una matriz con tres filas y cuatro columnas que tenga rango 2

19.- ¿Puede aumentar el rango de una matriz cuadrada de 3 filas al sustituir un coeficiente no nulo por 0? ¿y permanecer igual?

Justificar las respuestas

20.- Determinar un valor del parámetro a para que el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x - y + z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}, \text{ sea compatible e indeterminado}$$

21.- Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas que sea incompatible.

Interpretarlo geoméricamente

22.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} y - x = z \\ x - z = y \\ y + z = x \end{cases}$$

23.- Dar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado.

Interpretarlo geoméricamente

24.- Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A + I$, donde I es la matriz unidad. Demuestra que A es invertible

25.- Discute el sistema de ecuaciones lineales siguiente según los valores

del parámetro b:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1 + b)y - bz = 2b \\ x + by + (1 + b)z = 1 \end{cases}$$

26.- Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

27.- Escribe un ejemplo de una matriz de rango 2, con tres filas y cuatro columnas, que no tenga ningún elemento nulo

28.- a) Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$, según los valores de a

b) Escribe las propiedades del rango que hayas usado

29.- a) Enuncia el Teorema de Rouché - Fröbenius

b) Discute el sistema de ecuaciones lineales siguiente, según los valores del parámetro a

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

30.- Sea una matriz cuadrada de orden 3

a) Si sabemos que el determinante de la matriz $2A$ es $|2A| = 8$, ¿cuánto vale el determinante de A ?

Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener dicho valor

b) Calcula para qué valores de x se cumple que $|2A| = 8$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x + 1 & 2 & 2 \\ x & 2 - x & 1 \end{pmatrix}$$

31.- Calcula la matriz X tal que $A^2 \cdot X = A$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

32.- Discute, en función del parámetro a , el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ ax - y + 2z = 2 \text{ (NO es necesario resolverlo en ningún caso)} \\ 2x + (a - 1)z = 2 \end{cases}$$

33.- Determina el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & b \\ b & b-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

34.- a) Define el concepto de rango de una matriz

b) Determina razonadamente si la tercera fila de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 es combinación lineal de las dos primeras

35.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} ax + ay = 0 \\ x + z = a \\ -2y + az = a \end{cases}$,

según el valor del parámetro a

No es necesario resolver el sistema en ningún caso

36.- Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Sabemos que el determinante de A es $|A| = 2$

Calcule los siguientes determinantes:

- $|2A|$
- $|A^{-1}|$
- $|A \cdot A^t|$ (A^t es la traspuesta de A)
- Determinante de la matriz obtenida al intercambiar las dos primeras columnas de A
- Determinante de la matriz que se obtiene al sumar a la primera fila de A la segunda multiplicada por 2

37.- Determine el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -2 & 0 \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro b

38.- Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Diga razonadamente cuál es el rango de la matriz $A \cdot B$
- Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones $A \cdot B \cdot X = O$

39.- Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

- Calcule el determinante de A y compruebe la igualdad $|A| = (b - a)(c - a)(c - b)$
- ¿Qué relación debe existir entre a , b y c para que el rango de la matriz A sea igual a 1? Justifique la respuesta.

40.- a) Discuta el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

- Resuelva el anterior sistema.

41.- a) Defina el concepto de rango de una matriz

b) Calcule el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) Diga, razonadamente, si la segunda columna de la matriz anterior es combinación lineal de las otras dos

42.- Discuta, en función del parámetro b , el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} bx + by = 1 \\ 3x + bz = b - 2 \\ -y + z = b - 3 \end{cases}$$

(No es necesario resolverlo en ningún caso)

43.- a) Diga, justificando la respuesta, si es de Cramer el siguiente sistema

de ecuaciones:
$$\begin{cases} y - z = 1 \\ -x + 4z = 0 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve el anterior sistema de ecuaciones

44.- a) Sean B y C matrices cuadradas de orden 3. Diga cuándo, por definición, C es la matriz inversa de B

b) Diga razonadamente si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa, y si la respuesta es afirmativa, calcula la matriz A^{-1}

45.- Discuta, en función del parámetro a , el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = a + 1 \\ -2x - y + az = -2 \\ (a + 1)x + y - z = 2 \end{cases}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso)

46.- Determine el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a + 1 & -1 & a - 2 \\ -1 & a + 1 & 2 \end{pmatrix}$, según los valores de a

47.- Calcule las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación

$$X \cdot X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } X^t \text{ es la matriz traspuesta de } X$$

48.- Discuta, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + 2y + z = \alpha \\ x + (a - 1)y + az = 0 \\ \alpha + 2y + z = -1 \end{cases}$$

(No es necesario resolverlo en ningún caso)

49.- a) Diga, razonadamente, si la tercera columna de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ es combinación lineal de las dos primeras columnas}$$

b) Calcule el rango de la matriz A

50.- Discuta, en función del parámetro b , el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y + bz = 1 + b \\ x + z = 3 - b \\ bx - by = 1 - b \end{cases}$$

(No es necesario resolverlo en ningún caso)

51.- Discuta, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y + 2z = \alpha \\ -x + y - az = 1 \\ x + \alpha y + (1 + \alpha)z = -1 \end{cases}$$

(No hay que resolverlo en ningún caso)

52.- Calcule la matriz inversa de $A = B^2 - 2C$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

53.- Calcule los valores de α par los que el determinante de la matriz B es igual a 32, siendo $B = 2A^2$ y $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -\alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

54.- ¿Existe alguna matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$ que cumpla: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea No nula?

Razone la respuesta

55.- a) Encuentre, razonadamente, un valor del parámetro a para que sea compatible determinado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} ax + 2y + z = a + 1 \\ (a + 1)x - y - az = -1 \\ -x + y + z = 2a \end{cases}$$

b) Resuelva el sistema para el valor de a encontrado

56.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pruebe que la matriz inversa de A es $A^{-1} = -A^2 + A + 2I$

57.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & x & y \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & x & y \end{pmatrix}$, estudie si existen números x e y tales que la matriz B es la inversa de la matriz A

58.- a) Estudie para cuáles valores del parámetro m es compatible

determinado el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} (1 - 2m)x - y - z = -1 \\ (m - 1)x + y - z = 2 \\ mx^2 + y + z = 3 \end{cases}$$

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones para $m = 0$

59.- a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y - 4z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones

60.- a) Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcule la matriz inversa de A

c) Calcule el determinante de la matriz $B = \frac{1}{2} A^3$, sin obtener previamente B

61.- Considere las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $A = 3B^2 - C$

b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A

62.- Considere el sistema compatible determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas $S \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$, cuya solución es el punto $P_0 (2, -1)$ de \mathbb{R}^2

Sea S' el sistema que se obtiene al añadir a S una tercera ecuación $ax + by = c$

Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

- ¿Puede ser S' compatible determinado?
- ¿Puede ser S' incompatible?
- ¿Puede ser S' compatible indeterminado?

63.- Discutir, en función del parámetro b , el siguiente sistema de

ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + y = b \\ -2x - y + (b - 1)z = -2 \\ bx + y - z = 2 \end{cases}$$

No es necesario resolverlo en ningún caso

64.- Determine la relación que debe existir entre los parámetros x e y para

que las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ conmuten, es decir, para que $A \cdot B = B \cdot A$

65.- Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + 2B = C$

66.- Determine el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & b+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ b+1 & 1 & b \end{pmatrix}$, según los valores de b

67.- Discuta, en función del parámetro b , el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3y + bz = b - 2 \\ bx + by = 1 \\ -x + z = b - 3 \end{cases}$$

No es necesario resolverlo en ningún caso

68.- Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $C = 2A - B^2$

b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A

69.- Determine los números reales a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones lineales tiene al menos dos soluciones distintas

$$\begin{cases} az + by + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

70.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtenga las matrices X que cumplan la igualdad $AX + B^2 - 2A = 0$

71.- a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 3x - 5z = 3 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones

72.- Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = (1 \quad -2)$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Obtenga la matriz $A \cdot B$ y calcule su rango

b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones $A \cdot B \cdot X = O$

73.- a) Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Obtenga el determinante de la matriz $B = \frac{1}{3}A^4$ sin calcular previamente B

c) Calcule la matriz inversa de A

74.- Considere el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \\ ax + by + cz = 1 \end{cases}$$

Obtenga valores de los parámetros a, b y c en los siguientes casos:

a) Para que el sistema sea compatible indeterminado

b) Para que el sistema sea incompatible

75.- a) Discuta, en función del parámetro λ , el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelva el sistema para $\lambda = 1$

76.- Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $C = -3A + B^2$

b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A

77.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{pmatrix}$ que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$

a) Determine el rango de la matriz A según los valores del parámetro a

b) Para $a = 1$ resuelva, si existe solución, la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

78.- Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz X tal que $X = A^2 + B^2 - 2AB$

b) Halle la inversa de la matriz A

79.- Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de

$$\text{ecuaciones: } \begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ ax + y - z = 2 \\ 5x + 3y + z = 2a \end{cases}$$

80.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A tenga inversa

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda = 1$

81.- Dadas las siguientes matrices A e I, pruebe que la inversa de A es

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

82.- Discuta, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de

$$\text{ecuaciones: } \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x + y = a + 1 \\ (a + 1)x + y - z = 2 \end{cases}$$

